Examen Juin 2 001, Corrections

Arithmétique

Exercice 1 :

1. $0 < 3\ 452\ 312 < 4\ 781\ 000$
2. Les multiples de 543 sont du type 543n.
   Je cherche donc n tel que $30\ 000 < 543n < 250\ 000$
   Soit : $\frac{30\ 000}{543} < n < \frac{250\ 000}{543}$
   $55{,}2 < n < 460{,}4$
   Et comme n est entier : $56 \leq n \leq 460$
   Il y a donc $\boxed{405}$ multiples de 543 coppris entre 30 000 et 250 000.
   Le plus petit est $543 \times 56 = \boxed{30\ 408}$.
   Le plus grand est $543 \times 460 = \boxed{249\ 780}$.

Exercice 2 :

Soit a et b les 2 entiers cherchés, supposons b < a.
D' après l'énoncé : $a + b = 2\ 096$ (L1)
$a = 5b + 206$ et $206 < b$. (L2)
D'après L1 : $b = 2\ 096 – a$
Je remplace dans L2 : $a = 5\ (\ 2\ 096 – a) + 206$
Soit : $a = 10\ 480 – 5a + 206$
$6a = 10\ 686$
$a = 1\ 781$
et donc $b = 2\ 096 – 1\ 781 = 315$.
Les 2 entiers cherchés sont donc $\boxed{1\ 781 \text{ et } 315}$.

Exercice 3 :

Soit b le diviseur et q le quotient cherchés.
D' après l'énoncé : $557 = bq + 89$ et $89 < b$.
On en déduit : $bq = 557 – 89 = 468$ et $89 < b$.
Les diviseurs de 468 sont : {1 ;2 ;3 ;4 ;6 ;9 ;12 ;13 ;18 ;26 ;36 ;39;52 ;78;117 ;156 ;234 ;468}.
Les valeurs possibles de b et q sont donc :
$\boxed{(468\ ;1)\ (234\ ;2)\ (156\ ;3)\ (117\ ;4)}$.

Exercice 4 :

2 nombres impairs consécutifs sont du type 2n + 1 et 2n + 3.
On a alors : $2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4$
$= 4\ (n + 1)$.
Et donc la somme de 2 nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

Exercice 5 :

$$\begin{array}{r|l} 3\ 242 & 1\ 872 \\ 1\ 370 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,872 & 1\,370 \\ \cline{2-2} 502 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,370 & 502 \\ \cline{2-2} 366 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 502 & 366 \\ \cline{2-2} 136 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 366 & 136 \\ \cline{2-2} 94 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 136 & 94 \\ \cline{2-2} 42 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 94 & 42 \\ \cline{2-2} 10 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 10 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

$\boxed{\text{Le PGCD de 3 242 et 1 872 est donc 2}}$.

2. On sait que $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = ab$

   Par conséquent : $PPCM(3\,242\,;1\,872) = \dfrac{3\,242 \times 1872}{2}$

   Ce qui donne : $\boxed{PPCM(3\,242\,;1\,872) = 3\,034\,512}$.

<u>Exercice 6 :</u>

1.

Prix avant remise	100	p
Prix après remise	85	390,15

On en déduit que : $p = \dfrac{390{,}15 \times 100}{85}$ soit $\boxed{p = 459 \text{ F}}$

2. Prix de cet objet après la première augmentation : 1,1p

   Prix de cet objet après la deuxième augmentation : $1{,}1 \times 1{,}1p = 1{,}21p$.

   Le pourcentage d'augmentation de cet objet depuis le début de l'année est donc de $\boxed{21\%.}$

Géométrie

Exercice 7 :

2. Puisque ABC est rctangle en A, deaprès le théorème de Pythagore :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ soit $36 + AC^2 = 144$
D'où : $AC^2 = 144 - 36 = 108$ c'est-à-dire : $\boxed{AC = 6\sqrt{3}.}$
M est le milieu de [BC], donc (AM) est la médiane issue de A dans ABC, or,dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de l'hypoténuse, donc $\boxed{AM = 6}$.
3. Par hypothèse : AB = 6 et BM = 6
D'après 2. : AM = 6
Par conséquent : $\boxed{\text{AMB est un triangle équilatéral}}$.
4. H étant le projeté orthogonal de A sur (BC), (AH) est donc la hauteur issue de A du triangle AMB. Et comme ce triangle est équilatéral, (AH) est encore la médiane issue de A, la bissectrice de A et la médiatrice de [BM].
5. D'après ce qui précède, H est le milieu de [BM], donc $\boxed{HM = 3}$.
Comme AHM est rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore :
$AH^2 + HM^2 = AM^2$ soit $AH^2 = 36 - 9 = 27$ et donc $\boxed{AH = 3\sqrt{3}}$.
6. B' symétrique de B par rapport à A signifie que A est le milieu de [BB'] par conséquent : BB' = 2BA, c'est-à-dire BB' = 12.
Or, par hypothèse, BC = 12.
Comme (AC) est perpendiculaire à [BB'] en son milieu, donc (AC) est la médiatrice de [BB'] et donc BC = B'C = 12.
Finalement : BC = B'C = BB' et donc $\boxed{\text{CBB' est équilatéral}}$.
7. D' après l'énoncé : (AH) $\perp$ (HM) et donc $H \in \mathcal{C}$.
8. APM et AQM sont des triangles rectangles respectivement en P et en Q.
9. On sait que : (AB) $\perp$ (AC) et (MQ) $\perp$ (AC) donc (AB) // (MQ).
Dans le triangle ABC : M est le milieu de [BC] et (MQ)// (AB) donc Q est le milieu de [AC].
On démontre de la même façon que P est le milieu de [AB].
10. Dans le triangle ABM : P est le milieu de [AB]
I est le milieu de [AM]
Donc : (PI) // (BC)
Dans le triangle AMC : I est le milieu de [AM]
Q est le milieu de [AC]
Donc : (QI) // (BC)
Et donc (PI) // (QI) c'est-à-dire P, Q et I sont alignés et donc (PQ) est un diamètre de $\mathcal{C}$.
11. Dans le triangle BB'C : A milieu de [BB']
M milieu de [BC]
Donc : (AM) // (B'C)
Or, comme H' est le projeté orthogonal de A sur (BC), on a (AH') $\perp$ (B'C) et par conséquent (AH') $\perp$ (AM) ce qui prouve que la droite (AH') est tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.