Exercices de Mathématiques n°2

Corrections du DS 1 de Janvier 2 002
Licence pluridisciplinaire et Licence de lettres Modernes

Exercice 1 :

1. La division euclidienne de a par b, a entier naturel et b entier naturel non nul, consiste à déterminer le couple d'entiers naturels (q, r) tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
2. Comme $642 < 781$, alors le reste de la division euclidienne de 184 177 par 781 est 642.
3. Comme $642 > 235$, alors le reste de la division euclidienne de 184 177 par 285 ne peut être 642.
   On a alors : $642 = 2 \times 235 + 172$.
   D'où : $184\,177 = 235 \times 781 + 2 \times 235 + 172$.
   $184\,177 = 235\,(781 + 2) + 172$.
   $184\,177 = 235 \times 783 + 172$ et $172 < 235$.
   Par conséquent, le reste de la division euclidienne de 184 177 par 285 est 172.

Exercice 2 :

1. D'après l'hypothèse : $8a + 2 = 3\,(2a + 8)$.
   Par conséquent : $8a + 2 = 6a + 24$.
   $8a - 6a = 24 - 2$.
   $2a = 22$.
   $a = 11$.

   Finalement, la base de numération a dans laquelle : $\overline{82}_a = 3 \times \overline{28}_a$ est donc 11.

2.

385 209	7					
35	55 029	7				
0 20	6 0	7 861	7			
69	42	0 8	1 123	7		
6	09	16	42	160	7	
	2	21	03	20	22	7
		0	3	6	1	3

L'écriture en base 7 du nombre 385 209 est donc $\overline{3163026}_7$.

3. On écrit d'abord le nombre en base dix, puis le nombre obtenu en base cinq.

$\overline{2301_4} = 2 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 1 = 177.$

Par le même méthode que pour la question précédente, on obtient alors que :

$\boxed{\overline{2301_4} = \overline{1202_5}\,.}$

4. $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^{10} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^5.$
   En effet : $2^4 = (2^2)^2$; $2^6 = (2^2)^3$; $2^{10} = (2^2)^5$.
   Par conséquent :
   $\boxed{\text{L'écriture en base 4 du nombre } 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^{10} \text{ est } \overline{101111_4}\,.}$

Exercice 3 :

1. En utilisant la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide), on obtient :
   $\boxed{\text{PGCD (4 200 ; 5 940) = 60}}$.
   Et donc : PPCM (4 200 ; 5 940) = $\dfrac{4\,200 \times 5\,940}{60}$
   Soit : $\boxed{\text{PPCM (4 200 ; 5 940) = 415 800}}$.

   On peut aussi utiliser la décomposition des 2 nombres en produit de facteurs premiers, soit :

   $4\,200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$
   $5\,940 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11.$

2. Le dénominateur commun des 2 fractions est le PPCM des dénominateurs, par conséquent :

   $\dfrac{1}{4200} + \dfrac{1}{5940} = \dfrac{99+70}{415\,800}$ soit $\boxed{\dfrac{169}{415\,800}}$

3. On simplifie cette fraction en divisant ses 2 termes par leur PGCD, ce qui donne :
   $\dfrac{4\,200}{5\,940} = \boxed{\dfrac{70}{99}}$.

Exercice 4 :

1. Il faut que le nombre x + y + 1 = 9 (ou un multiple de 9)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	9
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8

2. Il faut que le nombre soit divisible par 3 et par 5.
   Donc y = 0 ou y = 5.

   <u>1^er cas</u> : Si y = 0 : $2 + x + 3 + 5 + y = 10 + x$
   $1 + 0 + x = 1 + x$

Il faut donc $1 + x = 3$ ou un multiple de 3.

<u>$2^{\text{ème}}$ cas :</u> Si $y = 5$: $2 + x + 3 + 5 + y = 15 + x$

$1 + 5 + x = 6 + x$

Il faut donc $6 + x = 3$ ou un multiple de 3.

En résumé, les solutions sont :

x	2	5	8	0	3	6	9
y	0	0	0	5	5	5	5

<u>Exercice 5 :</u>

1. Les nombres que l'on nomme sont du type $141 + 9\ k$.
   Je cherche donc k entier tel que $141 + 9\ k < 1\ 548$.
   Ce qui donne : $9\ k < 1\ 548 - 141$.
   $9\ k < 1\ 407$.
   $k < \dfrac{1407}{9}$ soit $k < 156{,}33..$
   Et comme k est entier, on en déduit $k = 156$.
   Le dernier nombre nommé est donc $141 + 9 \times 156$, c'est-à-dire $\boxed{1\ 545}$.
2. On a nommé autant de nombres qu'il y a d'entiers entre 0 et 156, on a donc nommé 157 nombres.
3. On peut remplacer 1 548 par 1 546, 1 547, 1 549, 1 550, 1 551, 1 552, 1 553 et 1 554.

<u>Exercice 6 :</u>

J'appelle $n = \overline{cdu}$ le nombre cherché.
D' après l'énoncé :

$100c + 10d + u - (100u + 10d + c) = 297$.
Soit $99c - 99u = 297$, soit enfin: $c - u = 3$. (1)
$c + d + u = 11$. (2)
$3c + 2d = 22$. (3)

D'après (1): $u = c - 3$.

D'après (3): $d = 11 - \dfrac{3}{2}$ c.

Je remplace dans (2) : $c + 11 - \dfrac{3}{2}c + c - 3 = 11$.

$\dfrac{1}{2}c + 8 = 11$ soit $\dfrac{1}{2}c = 3$ et donc $c = 6$.

D'où : $u = 3$ et $d = 2$.
Le nombre cherché est donc $\boxed{n = 623}$.

Exercice 7 :

1. Proposition A : **Vraie**

   En effet : soit n = $\overline{cdu}$ par exemple.

   Alors : $n = 100c + 10d + u$, $n^2 = 10\,000c^2 + 100d^2 + u^2 + 2\,000cd + 200cu + 20du$

   Soit $n^2 = 10\ (1\,000c^2 + 10d^2 + 200cd + 20cu + 2du) + u^2$

   Comme u = 2, donc $u^2 = 4$ et on constate que le chiffre des unités de u est bien 4.

   Proposition B : **Fausse**

   Ainsi : 14 se termine par 4 et $14^2 = 196$ ne se termine pas par 16.

2. a) $n = 10a + 5$.

   Donc $n^2 = (10a + 5)^2$

   $n^2 = 100a^2 + 100a + 25$

   $n^2 = 100\ (a^2 + a) + 25$.

   Comme $1 \le a \le 9$ alors on a: $1 \le a^2 \le 81$ donc $2 \le a^2 + a \le 90$

   Soit : $225 \le 100\ (a^2 + a) + 25 \le 9\,025$

   Ce qui démontre que n^2 s'écrit avec 4 chiffres au plus.

   b) D'après ce qui précède, comme $n^2 = 100\ (a^2 + a) + 25$, donc l'écriture de a^2 se termine par 25.

   c) Comme $2 \le a^2 + a \le 90$, le chiffre des centaines de n^2 est donc le chiffre des unités de $a^2 + a$.

Exercice 8 :

1.

Prix avant augmentation	100	x
Prix après augmentation	105	1 036,35

Ce qui donne : $x = \dfrac{1036{,}35 \times 100}{105}$ et donc $x = \boxed{987\ \text{€}}$.

2. Considérons le prix de 100€ .

   Après la première augmentation, ce prix est 105 € (100 + 0,05 × 100)

   Après la deuxième augmentation, ce prix est 110,25 € (105 + 0,05 × 105).

   Le pourcentage d'augmentation du prix final par rapport au prix initial est donc de $\boxed{10{,}25\ \%}$.