Exercices de Mathématiques n°1

Correction du devoir surveillé de Janvier 2001
Licence pluridisciplinaire

Exercice 1 :

1. $3\,425 < 2\,150\,000 < 3\,425\,000$
2. Les multiples de 415 sont du type 415n, avec n entier naturel.
   Je cherche donc n tel que $20\,000 < 415n < 200\,000$
   Soit encore $\frac{20\,000}{415} < n < \frac{200\,000}{415}$, cad $48{,}19\ldots < n < 481{,}9\ldots$
   Puisque n est entier : n est donc compris entre 49 et 481.
   Il y a donc $481 - 49 + 1 = \boxed{433}$ multiples de 415 compris entre 20 000 et 200 000.
   Le plus petit multiple est $415 \times 49 = \boxed{20\,335}$
   Le plus grand multiple est $415 \times 481 = \boxed{199\,615}$.

Exercice 2 :

D'après l'énoncé, si a et b sont les 2 nombres cherchés, on a :
$a - b = 538$ et $a = 13b + 22$
En remplaçant a de la 2ème égalité dans la 1ère égalité: $13b + 22 - b = 538$, soit $12b = 516$
Et donc : $\boxed{b = 43 \text{ et } a = 581}$.

Exercice 3 :

On divise 1 409 par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{1\,409} \approx 37$.
Comme aucune division ne se fait de façon exacte, donc 1 409 est premier.
Même méthode et même résultat pour 1 009.

Exercice 4 :

$1\,420 = 142 \times 10 = 2 \times 71 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 \times 71$
$2\,772 = 2 \times 1\,386 = 2 \times 2 \times 693 = 2^2 \times 9 \times 77 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$
Par conséquent : PGCD (1 420 ; 2 772) $= 2^2 = \boxed{4}$
PPCM (1 420 ; 2 772) $= 1420 \times 2\,772 / 4 = \boxed{984\,060}$.
Tout nombre qui divise 1 420 et 2 772 divise leur PGCD, donc les diviseurs communs à 1 420 et 2 772 sont 1, 2 et 4.

Exercice 5 :

$\overline{28x75y}$ est divisible par 5 ssi $y = 0$ ou $y = 5$.
Si $y = 0$, la somme des chiffres de ce nombre se ramène à $4 + x$, et le nombre sera divisible par 3 ssi 3 divise $4 + x$: d'où $x = 2$ ou 5 ou 8.
Si $y = 5$, la somme des chiffres de ce nombre se ramène à x, et le nombre sera divisible par 3 ssi 3 divise x : d'où $x = 0$ ou 3 ou 6 ou 9.

Exercice 6 :

Les nombres qui conviennent sont 6 et 28 :

Par exemple : div (6) = {1 ;2 ;3 ;6} et $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$.
div (12) = {1 ;2 ;3 ;4 ;6 ;12}et $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 \neq 2 \times 12$.

Exercice 7 :

$$\frac{3^{27}}{3} = \frac{3\times3\times3\times..\times3}{3} = 3^{26}.$$

Exercice 8 :

$\boxed{\text{Il y a 7 zéros}}$, car $2^7 \times 5^5 \times 10^2 = 2^5 \times 5^5 \times 10^2 \times 2^2 = 10^5 \times 10^2 \times 2^2 = 10^7 \times 2^2$.

Exercice 9 :

$\overline{1001101}_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1\times 2^6 = 77$.

Par divisions successives de 77 par 3, on trouve alors que : $\boxed{77 = \overline{2212}_3}$.

Exercice 10 :

Par hypothèse : a = 11q + 2 et b = 11q' + 7.
Par conséquent : a + b = 11(q + q') + 9 et donc le reste de la division de a + b par 11 est 9.
De même : a – b = 11(q – q') – 5, or un reste dans une division euclidienne est toujours supérieur ou égal à zéro, donc : a – b = 11(q – q') – 11 + 6
= 11(q – q' – 1) + 6, et donc le reste de la division de a - b par 11 est 6.

Exercice 11 :

1. Vrai
2. Faux : 1,4 + 2,6 = 4
3. Faux : $\frac{7}{2} = 3,5$
4. Faux : $\frac{8}{2} = 4$
5. Faux d'après 3 et 4.

Exercice 12 :

A. Non : car 6 250 est un multiple de 25.
B. Oui, car 160 vérifie les 3 propriétés données.
C. Non, car 64×25 est un multiple de 64.
D. Non, car 1 010 ne divise pas 1 000 000.

Exercice 13 :

Exercice déjà traité !!

Exercice 14 :

Le nombre de billets dans chaque liasse est le PGCD de 320 et 448.
$320 = 32 \times 10 = 2^6 \times 5$

$448 = 4 \times 112 = 2^2 \times 4 \times 28 = 2^6 \times 7$
PGCD (320 ;448) = $2^6 = 64$: il y a donc $\boxed{\text{64 billets par liasses}}$.
Et il y aura un paquet de 5 liasses et un autre de 7 liasses.

Exercice 15 :

Soit x la contenance totale du bassin. Comme 120 – 12 = 102, alors par hypothèse :
$\frac{2}{3}$ x = 102 soit x = 102 × $\frac{3}{2}$ = 153.
$\boxed{\text{La contenance totale du bassin est donc de 153l}}$.

Exercice 16 :

Soit x le prix payé par Albert pour se procurer le tableau.
Albert le revend x + 0,1x = 1,1 x.
Bernard le revend 1,1x + 0,1× 1,1x = 1,21x.
Charles le revend 1,21x – 0,1 × 1,21x = 1,089x.
Dominique le revend 1,089x – 0,1 × 1,089x = 0,9801x.
On a alors :

Prix payé par Albert	x	100
Prix vendu par Dominique	1 470,15	0,9801

Par conséquent : x = $\frac{1470{,}15 \times 100}{0{,}9801}$ soit x = 1 500.
$\boxed{\text{Albert a acheté le tableau pour 1 500F}}$.